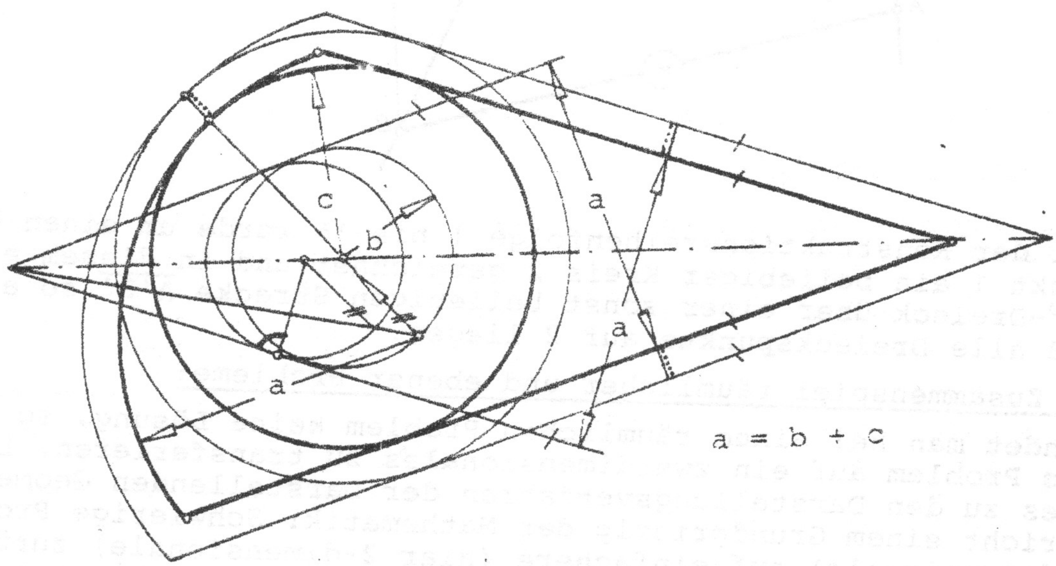
Dr. Karlhorst Meyer

Geometrische Methoden

Vier geometrische Methoden wurden vorgestellt:

1. Schrumpfen und Aufblasen von Kreisen und Kugeln:

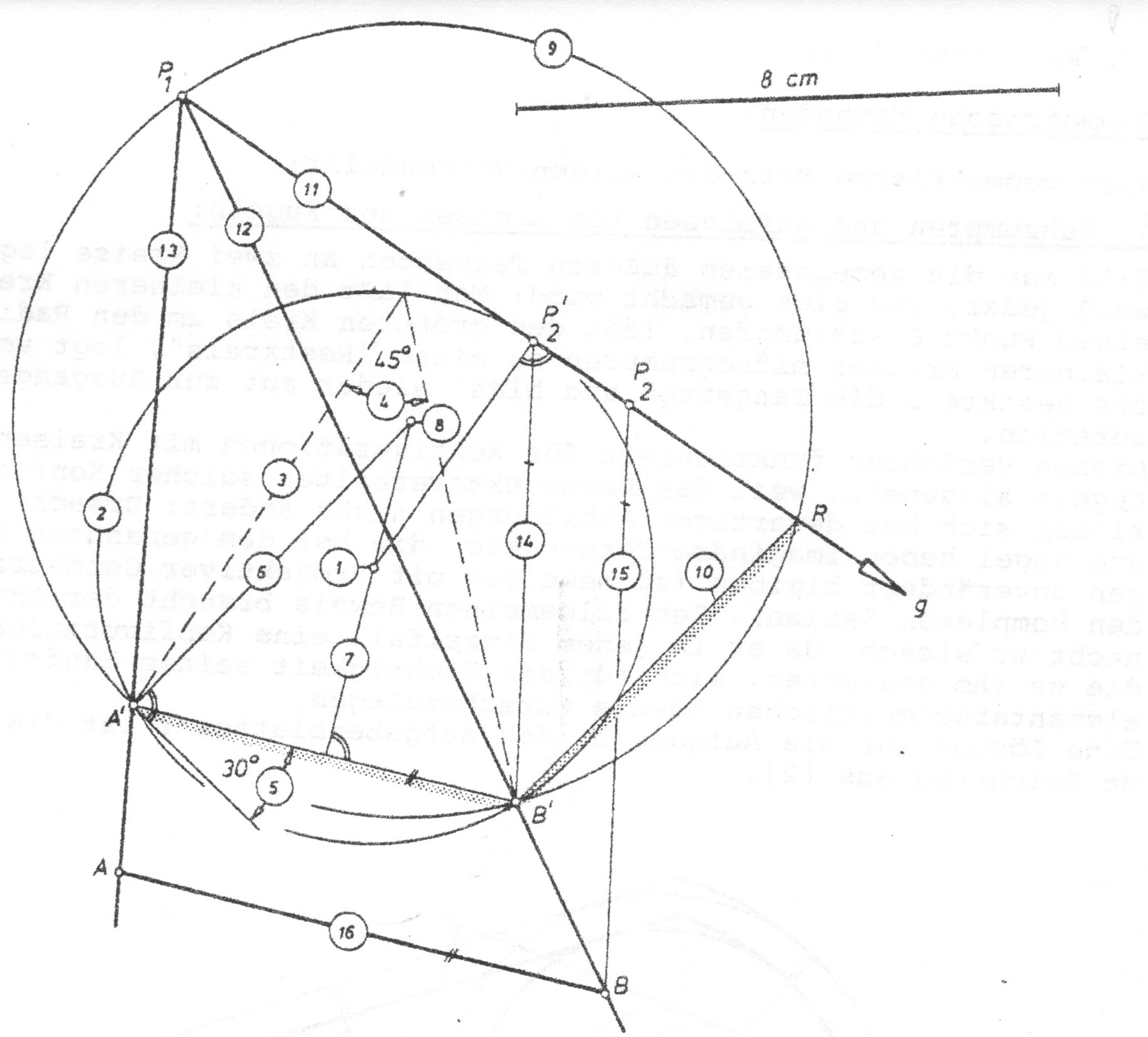
Will man die gemeinsamen äußeren Tangenten an zwei Kreise legen, so weiß jeder, wie dies gemacht wird: Man läßt den kleineren Kreis zu einem Punkt P schrumpfen, läßt den größeren Kreis um den Radius des kleineren Kreises mitschrumpfen zu einem "Restkreis", legt von P an den Restkreis die Tangenten und bläst wieder auf zur Ausgangskonfiguration.
Dieses Verfahren funktioniert für Konfigurationen mit Kreisen und Kugeln allgemein, weil das Fernpunktsverhalten solcher Konfigurationen sich bei derartigen Abbildungen nicht ändert; Ursache: Kreis und Kugel haben imaginäre Fernpunkte, die bei den genannten Abbildungen unverändert bleiben (zu beweisen mit Projektiver Geometrie über den komplexen Zahlen). Den allgemeinen Beweis braucht der Anwender nicht zu wissen, da er in jedem Einzelfall eine Konfiguration erhält, die es ihm gestattet, sich für die Richtigkeit seines Handelns einen elementargeometrischen Beweis zurechtzulegen.
Eine Lösung für die Aufgabe b) des Aufgabenblattes 2 ist die folgende Zeichnung aus [2]:



Zur Verdeutlichung des Aufblasvorganges wurde außen um das Dreieck eine Parallelkurve gezeichnet, mit der ein elementargeometrischer Beweis gefunden werden kann.

2. Das geistige, innere Auge spielt mit Abbildungen:

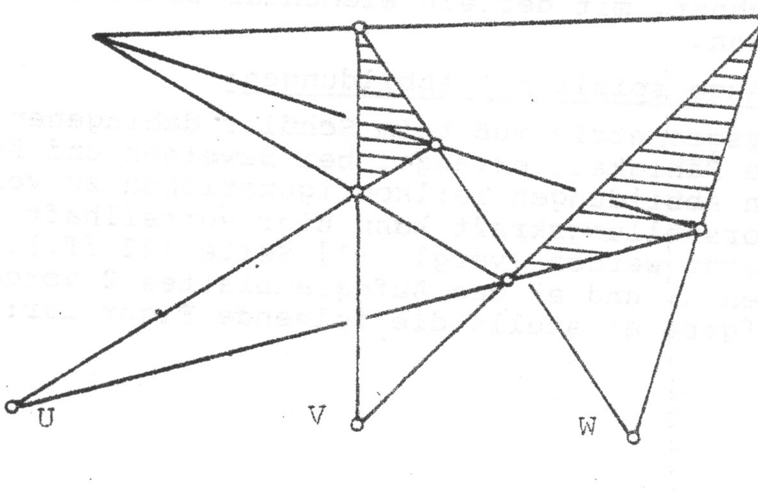
Die Schulung in Abbildungsgeometrie muß beim Schüler dahingehen, daß sein inneres Auge die Fähigkeit erlangt, bei Beweisen und Konstruktionen mit Hilfe von Abbildungen Teilkonfigurationen zu versetzen. Zur Hebung der Vorstellungskraft kann hier vorteilhaft Transparentpapier eingesetzt werden (vergl. [1] Seite 122 ff.). Dies wurde an den Aufgaben d) und e) des Aufgabenblattes 2 vorgeführt. Die Lösung der Aufgabe e) stellt die folgende Figur dar:



Bei der Konstruktionsreihenfolge 1 bis 16 wurde um einen beliebigen Punkt 1 ein beliebiger Kreis 2 gezeichnet und in diesem ein beliebiges 45°-Dreieck über einer sonst beliebigen Strecke $\overline{A'B'}$ so eingetragen,. daß alle Dreieckspunkte auf 2 liegen.

3. Zusammenspiel räumlicher und ebener Probleme:

Findet man bei einem räumlichen Problem keine Lösung, so versucht man das Problem auf ein zweidimensionales zu transferieren. Letztlich führt dies zu den Darstellungsverfahren der Darstellenden Geometrie und entspricht einem Grundprinzip der Mathematik: Schwierige Probleme (hier 3-dimensionale) auf einfachere (hier 2-dimensionale) zurückzuführen. Weniger bekannt ist die umgekehrte Richtung: Gegeben ist ein 2-dimensionales Problem, etwa die Konfiguration von DESARGUES:



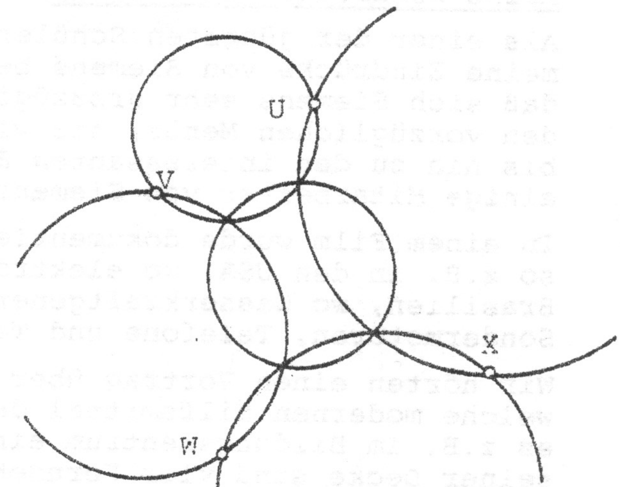
Wie kann man erkennen, daß UVW auf einer Geraden liegen?

Die beiden schraffierten Flächen stelle man sich als zwei ebene Schnitte einer 3-seitigen Pyramide vor. Da zwei Ebenen (die durch die schraffierten Dreiecke festgelegten) sich in einer Geraden schneiden oder parallel sind (letzteres kann hier auch vorkommen!), müssen UVW auf dieser Schnittgeraden liegen.

Genauso beweist man den Satz des MIQUEL (Problem c) auf Aufgabenblatt 2):

Zeichnet man nebenstehende Figur, so liegen UVWX auf einem Kreis.

Nur ist hier die dreidimensionale Interpretation der Figur nicht ganz so einfach. Man benötigt:



4. Stereographische Projektion

(Problem f) Aufgabenblatt 2):
Nach erfolgter Definition wurde elementar die Winkeltreue und nach ECKARDT die Kreistreue dieser Abbildung bewiesen. Schließlich konnte der Satz von MIQUEL bewiesen werden. Als Abfallprodukt erhielt man den Satz:
Jeder schiefe Kreiskegel hat zwei Scharen untereinander paralleler Kreisschnitte.

Die Schüler stellten viele Fragen, beteiligten sich recht lebhaft. Sie waren allerdings mit dem Ablauf dieses Teils des Seminars nicht ganz so zufrieden: Zu oberflächlich ergaben sich Beweisideen, zu wenig wurde ihnen schriftlich fixiert, wie sie das von anderen Bereichen der Mathematik her gewohnt sind. Das Vorgehen schien immer wieder zu wenig systematisch zu sein. Dieses für die Geometrie oft typische Verhalten stellt aber den besonderen Wert der Geometrie für die Gedächtnisschulung dar und hat seine Ursache in dem verhältnismäßig großen Axiomensystem des Anschauungsraumes: Um Lösungsstrategien zu finden, muß man bei komplexeren Fragestellungen bereit sein, in der Gedankenkette immer wieder Lücken zu lassen, die erst dann geschlossen werden können, wenn die Gesamtproblematik einer Lösung zustrebt; ein unbequemer Weg, der oft Kritiker der Geometrie sagen ließ, daß dies gar keine Disziplin der Mathematik sei (vergl. [3]).

Literatur:

[1] Meyer, Karlhorst: Algebra und Geometrie, Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht Band 1, Hirschgraben 1980

[2] : Über das Miteinander von Abbildungs- und Figurengeometrie, Mathematikinformation Gymnasium Starnberg Nr. 7

[3] : Geometrie, vielfältiger und lebendiger denn je Mathematikinformation Gymnasium Starnberg Nr.10